Προβλήματα Χρωματισμού Μονοπατιών σε Δενδρικά Δίκτυα

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

2008

Οπτικά Δίκτυα

- Οπτικές ίνες: συνδέσεις μεταξύ κόμβων
- Μεγάλες ταχύτητες μεταφοράς δεδομένων
- Πολυπλεξίας Διαίρεσης Μήκους Κύματος (WDM)
  - κανάλι = μήκος κύματος
  - εύρος ζώνης = πλήθος διαθέσιμων καναλιών
- Πρόβλημα: Κατανομή Εύρους Ζώνης
- Μοντελοποίηση
  - οπτικό δίκτυο $\rightarrow$ γράφημα G
  - Αιτήσεις αποστολέα-παραλήπτη $\rightarrow$ μονοπάτια
  - ανάθεση μήκους κύματος $\rightarrow$ χρωματισμός

Πρόβλημα Χρωματισμού Ακμών

Ορισμός

Δεδομένου ενός γράφου G, πόσα χρώματα χρειάζονται για να χρωματίσουμε τις ακμές του έτσι ώστε δύο οποιεσδήποτε ακμές που πρόσκεινται στην ίδια κορυφή να έχουν διαφορετικό χρώμα;

- $\chi'(G) =$ ελάχιστος αριθμός των χρωμάτων
  $\Delta =$ μέγιστος βαθμός κορυφών G
- Διμερής G: $\chi'(G) = \Delta$ [Köning 1916]
- $\Delta + 1$ χρώματα είναι αρκετά [Vizing 1964]
- πολυωνυμικός αλγόριθμος για απλό γράφημα: $\Delta + 1$ χρώματα [Fournier 1973]
- Πρόβλημα απόφασης: « $\chi'(G) = \Delta$ ή $\chi'(G) = \Delta + 1$; » NP-complete [Holyer 1981]

Πρόβλημα Χρωματισμού Μονοπατιών

φορτίο ℓ_e	:	πλήθος των μονοπατιών που χρησιμοποιούν την $e \in E$
L	:	$\max_{e \in E} \ell_e$
$\Lambda(G,P)$	:	πλήθος των χρωμάτων για το χρωματισμό του P
$\Lambda^*(G,P)$	:	ελάχιστο πλήθος χρωμάτων για το χρωματισμό του P
$\lambda(p)$		χρώμα μονοπατιού p
$u \sim v$		μη κατευθυνόμενο μονοπάτι $u, v \in V$
$u \rightsquigarrow v$		κατευθυνόμενο μονοπάτι $u, v \in V$

Πρόβλημα Χρωματισμού Μονοπατιών

Ορισμός

Δεδομένου γράφου G και συνόλου μονοπατιών P να δοθεί χρωματισμός των μονοπατιών με τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων τέτοιος ώστε δύο οποιαδήποτε μονοπάτια με μια κοινή ακμή να έχουν διαφορετικό χρώμα.

σωστός χρωματισμός : οποιαδήποτε δύο μονοπάτια με μια κοινή ακμή έχουν διαφορετικό χρώμα

κάτω φράγμα $\Lambda^*(G, P) = L$

2 μοντέλα
- δένδρα με μη κατευθυνόμενες ακμές
- δένδρα με κατευθυνόμενες ακμές

Θεώρημα

[2] *Το πρόβλημα του χρωματισμού μονοπατιών σε μη κατευθυνόμενα σταθερού βαθμού δένδρα ανήκει στο P.*

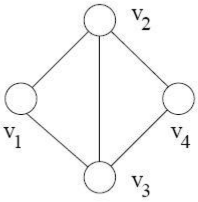
Θεώρημα

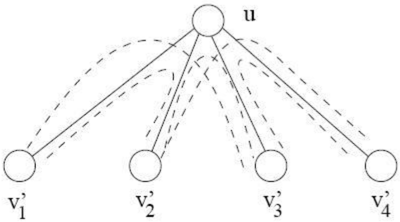
[2] *Το πρόβλημα απόφασης του χρωματισμού μονοπατιών με k χρώματα σε μη κατευθυνόμενα δένδρα βάθους 2 είναι NP-complete.*

Σκιαγράφηση Απόδειξης:

Αναγωγή

- από χρωματισμός ακμών με k χρώματα σε γράφημα G
- σε χρωματισμός μονοπατιών με k χρώματα σε μη κατευθυνόμενο δένδρο T





Κατασκευή:

- ένα κόμβο v' για κάθε κόμβο $v \in V$
- ένα κόμβο u που συνδέεται με όλους τους v'
- ένα μονοπάτι $u'_i \sim u'_j$ για κάθε ακμή $(u_i, u_j) \in E$

Ιδιότητα : σύνολο μονοπατιών στο T με κοινή ακμή $\leftrightarrow$ αντίστοιχες ακμές στο G γειτονικές

- Αν $\chi''(G) = k$ τότε $\lambda(u'_i \sim u'_j) = \chi'(u_i, u_j)$
- Αν $\Lambda(G, P) = k$ τότε $\chi'(u_i, u_j) = \lambda(u'_i \sim u'_j)$

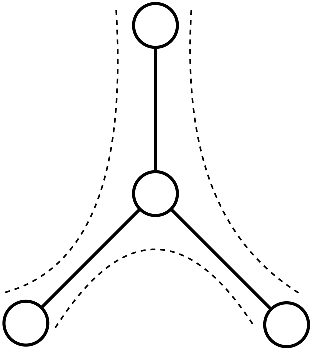
Θεώρημα

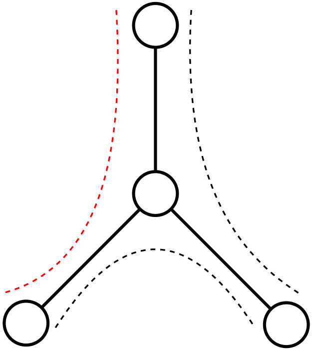
[2] *Το πρόβλημα απόφασης του χρωματισμού μονοπατιών με k χρώματα σε κατευθυνόμενα δένδρα βάθους 3 είναι NP-complete.*

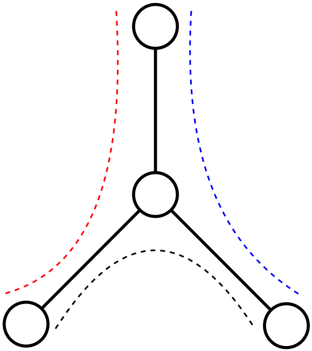
Θεώρημα

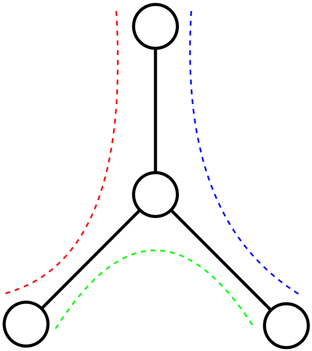
[2] *Το πρόβλημα απόφασης του χρωματισμού μονοπατιών με k χρώματα σε κατευθυνόμενα δυαδικά δένδρα είναι NP-complete.*

Κάθε διακεκομένο βέλος αναπαριστά 2λ μονοπάτια, ακέραιος $\lambda \geq 1$



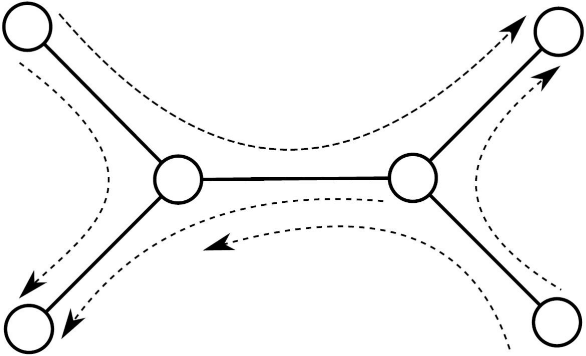


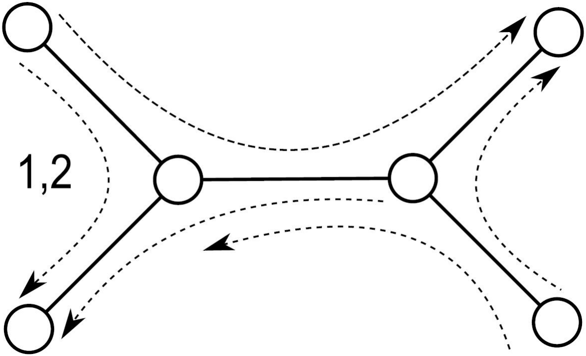


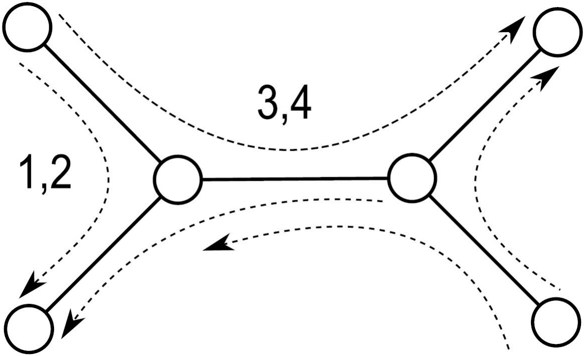


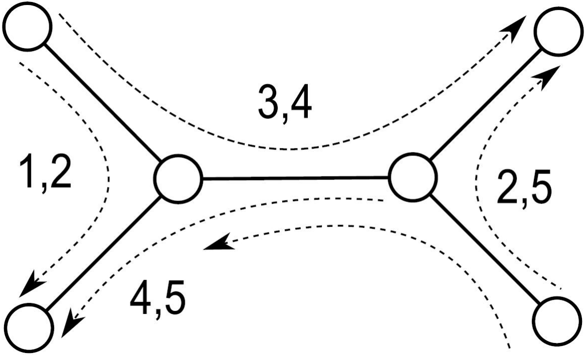
- $L = 4\lambda$
- $\Lambda(G, P) = 6\lambda = 3L/2$ [4]

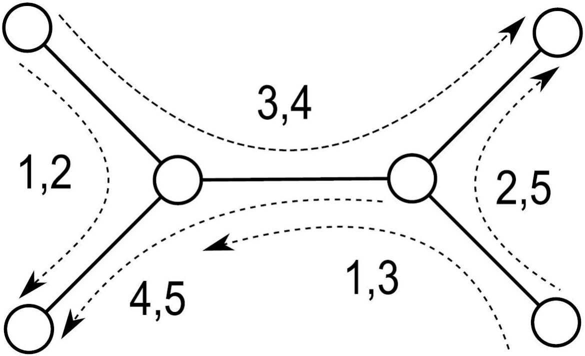
Κάθε διακεκομένο βέλος αναπαριστά 2λ κατευθυνόμενα μονοπάτια, ακέραιος $\lambda \geq 1$




1,2


3,4
1,2


3,4
1,2
2,5
4,5



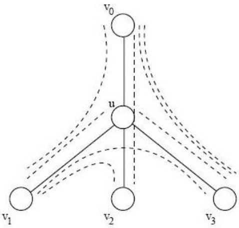
- $L = 4\lambda$
- $\Lambda(G, P) = 5\lambda = 5L/4$
- κάθε χρώμα σε 2 μονοπάτια το πολύ → τουλάχιστον $10\lambda/2 = 5L/4$ χρώματα [3]

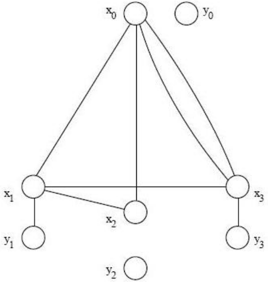
Αλγόριθμοι για μη κατευθυνόμενα Δενδρικά Γραφήματα

- Greedy αλγόριθμος με φάσεις
- Σε κάθε φάση επιλέγεται ένας κόμβος u με βάση την BFS και επεκτείνεται ο χρωματισμός
- πρόβλημα χρωματισμού μονοπατιών $\longrightarrow$ πρόβλημα χρωματισμού ακμών

Κατασκευή:

- $u_i \longrightarrow x_i, y_i$
- $u \sim v_i \longrightarrow$ **ακμή** (x_i, y_j)
- $v_i \sim v_j \longrightarrow$ **ακμή** (x_i, x_j)





- μέγιστος βαθμός κορυφών G_u L
- ακμές γειτονικές στο x_i : μονοπάτια με ακμή u, v_i
- ακμές γειτονικές στο x_0 : μονοπάτια με ακμή u, v_0

- Περιορισμοί στο χρωματισμό
- Αλγόριθμος Shannon για χρωματισμό ακμών σε γράφημα με μέγιστο βαθμό L και $3L/2$ χρώματα

Θεώρημα

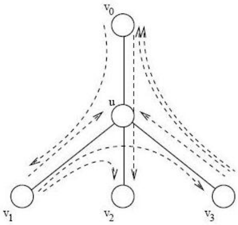
[4] *Υπάρχει άπληστος πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος που χρωματίζει οποιοδήποτε σύνολο μονοπατιών με φορτίο L σε μη κατευθυνόμενο δενδρικό γράφημα χρησιμοποιώντας το πολύ $3L/2$ χρώματα.*

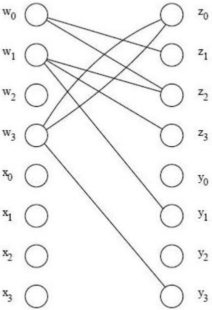
Το αποτέλεσμα είναι ακριβές.

Οι αλγόριθμοι [1, 3] ανάγουν το χρωματισμό των μονοπατιών σε ένα πρόβλημα χρωματισμού ακμών σε ένα διμερές γράφημα

Κατασκευή:

- $v_i \longrightarrow x_i, y_i, w_i, z_i$
- $v_i \rightsquigarrow v_j : (w_i, z_j)$ $\quad v_i \rightsquigarrow u : (w_i, y_i)$ $\quad u \rightsquigarrow v_i : (z_i, x_i)$
- μέγιστο βαθμό κορυφών L, υποθέτουμε L-κανονικό





Ορισμοί:

δεσμευμένες ακμές γειτονικές στις κορυφές w_0, z_0

α-περιορισμένος χρωματισμός ακμών διμερούς γραφήματος δεσμευμένες ακμές έχουν χρωματιστεί με το πολύ αL χρώματα

γραμμή: ζεύγος w_i, z_i

μονά S (διπλά D) χρώματα χρησιμοποιούνται μόνο σε μια (δύο) δεσμευμένη ακμή

Αλγόριθμος:

- Ο αλγόριθμος υποθέτει ότι $S + D = 4L/3$
- αποσυνδέει το γράφημα σε L ταιριάσματα
- χρωματισμός των ταιριασμάτων
  1. Ο αριθμός των νέων χρωμάτων που χρησιμοποιούνται να είναι το πολύ $D/2$
  2. Κάθε γραμμή χρησιμοποιεί το πολύ $4L/3$ χρώματα.
- $2D + S \leq 2L \Rightarrow D \leq 2L/3$
- $D + S + D/2 = 5L/3$

Θεώρημα

[1] *Υπάρχει άπληστος πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος που χρωματίζει οποιοδήποτε σύνολο κατευθυνόμενων μονοπατιών P σε κατευθυνόμενο δενδρικό γράφημα χρησιμοποιώντας το πολύ $5L/3$ χρώματα.*

Θεώρημα

[1] *Για κάθε $L > 1$ και κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε άπληστο αλγόριθμο G υπάρχει ένα δένδρο και ένα σύνολο μονοπατιών μέγιστου φορτίου L για το οποίο ο G χρησιμοποιεί τουλάχιστον $(\frac{5}{3} - \varepsilon)L$ χρώματα.*

T. Erlebach, K. Jansen, C. Kaklamanis, M. Mihail, and P. Persiano.
Optimal wavelength routing on directed fiber trees.
Theoretical Computer Science, 221:119–137, 1999.

S. R. Kumar, R. Panigrahy, A. Russel, and R. Sundaram.
A note on optical routing on trees.
Information Processing Letters, 62(6):295–300, 1997.

V. Kumar and E. J. Schwabe.
Improved access to optical bandwidth in trees.
In *SODA: ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (A Conference on Theoretical and Experimental Analysis of Discrete Algorithms)*, 1997.

P. Raghavan and E. Upfal.
Efficient routing in all-optical networks.
pages 134–143, 1994.

Τέλος Παρουσίασης...

Ευχαριστώ!