Προβλήματα Χρωματισμού Μονοπατιών σε Δενδρικά Δίκτυα

Βησσαρίων Φυσικόπουλος

26 Ιουνίου 2008

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με αλγοριθμικά προβλήματα που προκύπτουν σε μοντέλα οπτικών δικτύων που χρησιμοποιούν την τεχνολογία *πολυπλεξίας διαίρεσης μήκους κύματος* (*Wavelength Division Multiplexing* - WDM). Τα προβλήματα αυτά σε δενδρικά δίκτυα μοντελοποιούνται σε *προβλήματα χρωματισμού μονοπατιών* σε γραφήματα. Το πρόβλημα χρωματισμού μονοπατιών σε γραφήματα σχετίζεται με το πρόβλημα χρωματισμού ακμών σε γραφήματα και πολλοί γνωστοί αλγόριθμοι ανάγουν το ένα πρόβλημα στο άλλο για να επιτύχουν ένα σωστό χρωματισμό.

Με βάση τα αποτελέσματα για την πολυπλοκότητα του προβλήματος παρατηρούμε ότι το πρόβλημα χρωματισμού μονοπατιών σε δενδρικά γραφήματα είναι εν γένη *υπολογιστικά δύσκολο*. Παρόλα αυτά παρουσιάζουμε κάτω φράγματα και προσεγγιστικούς αλγορίθμους που αποτελούν άνω φράγματα τόσο για το μοντέλο των δενδρικών δικτύων μη κατευθυνόμενες συνδέσεις όσο και για το πιο ρεαλιστικό μοντέλο των δενδρικών δικτύων με κατευθυνόμενες συνδέσεις και κατευθυνόμενα μονοπάτια.

1 Εισαγωγή

Τα οπτικά δίκτυα χρησιμοποιούν οπτικές ίνες για τις συνδέσεις επικοινωνίας μεταξύ των κόμβων του δικτύου και εξασφαλίζουν μεγάλες ταχύτητες μεταφοράς ροών δεδομένων. Η τεχνολογία *πολυπλεξίας διαίρεσης μήκους κύματος* (*Wavelength Division Multiplexing* - WDM) μπορεί να μεταφέρει διαφορετικές ροές δεδομένων μέσα από την ίδια οπτική ίνα χρησιμοποιώντας ανεξάρτητα κανάλια για κάθε ροή δεδομένων. Κάθε κανάλι αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο μήκος κύματος. Το πλήθος των διαθέσιμων καναλιών ονομάζεται *εύρος ζώνης*.

1.1 Περιγραφή του Προβλήματος

Ένα σημαντικό πρόβλημα που προκύπτει στα οπτικά δίκτυα WDM είναι η κατανομή του εύρους ζώνης. Έστω ότι έχουμε μια σειρά από αιτήσεις επικοινωνίας στο δίκτυο που αντιστοιχούν σε ένα σύνολο ζευγών αποστολέα - παραλήπτη. Τα ζεύγη αποστολέα - παραλήπτη ουσιαστικά αναπαριστάνουν μονοπάτια στο οπτικό δίκτυο. Πρέπει να αναθέσουμε ένα μήκος κύματος σε κάθε ζεύγος - μονοπάτι αιτήσεων με τον περιορισμό ότι αίτησεις που χρησιμοποιούν τον ίδιο σύνδεσμο - ακμή θα πρέπει να χρησιμοποιούν διαφορετικό μήκος κύματος. Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Μπορούμε να μοντελοποιήσουμε το οπτικό δίκτυο με ένα *γράφημα* και το σύνολο ζευγών αποστολέα - παραλήπτη με ένα *σύνολο μονοπατιών* μεταξύ των κόμβων του γραφήματος. Οπότε, το παραπάνω πρόβλημα κατανομής εύρους ζώνης μοντελοποιείται σε ένα *πρόβλημα χρωματισμού μονοπατιών* σε γράφηματα. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής πρόβλημα: δεδομένου ενός γραφήματος G και ενός συνόλου μονοπατιών P στο γράφημα G, να βρεθεί χρωματισμός των μονοπατιών τέτοιος ώστε οποιαδήποτε μονοπάτια χρησιμοποιούν την ίδια ακμή να έχουν διαφορετικά χρώματα και να χρησιμοποιηθεί ο *ελάχιστος αριθμός χρωμάτων*. Η εύρεση του ελάχιστου αριθμού χρωμάτων είναι πρακτικά σημαντική καθώς το εύρος ζώνης των οπτικών ινών είναι σχετικά μικρό με βάση την υπάρχουσα τεχνολογία.

Ορίζουμε ως φορτίο μιας σύνδεσης (ακμής) τον αριθμό των μονοπατιών που τη χρησιμοποιούν και ως φορτίο του συνόλου μονοπατιών L το μέγιστο φορτίο μεταξύ όλων των συνδέσεων. Στην παρούσα εργασία θα επικεντρωθούμε κυρίως σε δενδρικές τοπολογίες οπτικών δικτύων οι οποίες εμφανίζονται πολύ συχνά στην πράξη οπότε τα αντίστοιχα γραφήματα θα είναι δένδρα. Σημειώνουμε ότι στις δενδρικές τοπολογίες τα μονοπάτια που αντιστοιχούν σε κάθε αίτηση επικοινωνίας είναι μοναδικά.

1.2 Ιστορική Αναδρομή

Το πρόβλημα χρωματισμού μονοπατιών έχει άμεση σχέση με το πρόβλημα χρωματισμού ακμών που είναι ένα από τα παλαιότερα στην θεωρία γραφημάτων. Το πρόβλημα χρωματισμού ακμών διατυπώνεται ώς εξής:

> Δεδομένου ενός γράφου G, πόσα χρώματα χρειάζονται για να χρωματίσουμε τις ακμές του έτσι ώστε δύο οποιεσδήποτε κορυφές που πρόσκεινται στην ίδια κορυφή να έχουν διαφορετικό χρώμα;

Το 1880 ο Tait συνδέει την εικασία των τεσσάρων χρωμάτων με το χρωματισμό ακμών παρατηρώντας ότι η εικασία είναι ισοδύναμη με τον ισχυρισμό ότι οι ακμές κάθε κυβικού, επίπεδου, χωρίς γέφυρες γράφου μπορούν να χρωματιστούν χρησιμοποιώντας μόνο τρία χρώματα. Περίπου δέκα χρόνια αργότερα, ο Petersen παρατηρεί ότι υπάρχουν κυβικοί, χωρίς γέφυρες γράφοι που οι ακμές τους δεν μπορούν να χρωματιστούν μόνο με τρία χρώματα. Ένας από αυτούς είναι ο περίφημος γράφος του Petersen. Το 1916 ο *König* αποδεικνύει ότι για κάθε διμερή γράφο G, ο ελάχιστος αριθμός των χρωμάτων $\chi'(G)$ που χρειάζονται για να χρωματίσουμε τις ακμές του G είναι ίσος με τον μέγιστο βαθμό Δ των κορυφών του G. Το 1964 ο Vizing αποδεικνύει ότι $\Delta + 1$ χρώματα είναι αρκετά για το χρωματισμό των ακμών οποιουδήποτε γραφήματος.

Σχετικά με την αλγοριθμική πολυπλοκότητα του υπολογισμού του ελάχιστου αριθμού χρωμάτων για ένα γράφο, το 1973 ο Fournier σχεδιάζει έναν πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμο που χρωματίζει τις ακμές ενός απλού γραφήματος χρησιμοποιώντας $\Delta + 1$ χρώματα. Παρόλα αυτά το 1981 ο Holyer αποδεικνύει ότι το πρόβλημα απόφασης, αν $\chi'(G) = \Delta$ ή $\chi'(G) = \Delta + 1$ για ένα γράφημα G είναι NP-complete.

1.3 Σχετικές Δημοσιεύσεις

Στο [4] εξετάζεται η πολυπλοκότητα του προβλήματος χρωματισμού μονοπατιών. Παρουσιάζεται ένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος που χρωματίζει μονοπάτια σε σταθερού μεγέθους αυθαίρετα γραφήματα με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό χρωμάτων λύνοντας ένα πρόβλημα ακέραιου προγραμματισμού. Επίσης παρουσιάζεται ένας πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος που χρωματίζει μονοπάτια σε σταθερού βαθμού μη κατευθυνόμενα δένδρα χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αλγόριθμο για σταθερού μεγέθους γραφήματα. Από την άλλη πλευρά, αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα του χρωματισμού μονοπατιών σε κατευθυνόμενα δένδρα βάθους 3 καθώς και σε δυαδικά κατευθυνόμενα δένδρα είναι NP-complete. Η αποδείξεις χρησιμοποιούν αναγωγές από το πρόβλημα του χρωματισμού ακμών που είναι γνωστό NP-complete πρόβλημα (βλ.ενότητα 1.2) στο πρόβλημα του χρωματισμού μονοπατιών.

Στα [7, 2] δίνεται ένας άπληστος αλγόριθμος χρωματισμού μονοπατιών σε μη κατευθυνόμενα δένδρα χρησιμοποιώντας το πολύ $3L/2$ χρώματα. Ο αλγόριθμος για να πετύχει το χρωματισμό ανάγει το πρόβλημα σε ένα πρόβλημα χρωματισμού ακμών σε ένα πολλαπλό γράφημα (multigraph).

Το [3] ασχολείται με το πρόβλημα χρωματισμού μονοπατιών σε κατευθυνόμενα δένδρα. Προτείνεται και αναλύεται ένας άπληστος αλγόριθμος που λύνει το πρόβλημα του χρωματισμού μονοπατιών σε κατευθυνόμενα δένδρα χρησιμοποιώντας το πολύ $5L/3$ χρώματα. Ο αλγόριθμος ανάγει το πρόβλημα σε ένα πρόβλημα χρωματισμού ακμών σε ένα διμερές πολλαπλό γράφημα (bipartite multigraph). Επίσης αποδεικνύεται ένα κάτω φράγμα που δείχνει ότι δεν υπάρχει άπληστος αλγόριθμος που να χρησιμοποιεί λιγότερα χρώματα.

1.4 Ανοικτά Προβλήματα

Κλείνουμε την εισαγωγή παραθέτοντας μια λίστα με ανοικτά προβλήματα στην περιοχή του χρωματισμού μονοπατιών σε δένδρα. Η λίστα βασίζεται κυρίως σε μια σειρά από ανοικτά προβλήματα που θέτει το [1].

- Βελτίωση των γνωστών φραγμάτων του χρωματισμού μονοπατιών σε μη κατευθυνόμενα δένδρα. Το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με το να βελτιώσουμε τα φράγματα του χρωματισμού ακμών σε πολλαπλά γραφήματα που φαίνεται αρκετά δύσκολο. Ενδιαφέρον έχει η εύρεση προσεγγιστικών αλγορίθμων για το πρόβλημα αυτό.
- Μείωση του κενού ανάμεσα στα δύο φράγματα για το πρόβλημα χρωματισμού μονοπατιών σε κατευθυνόμενα δένδρα, $5L/4$ και $5L/3$ καθώς και του κενού $5L/4$ και $7L/5 + o(L)$ για τα δυαδικά δένδρα.
- Εύρεση φραγμάτων πιθανοτικών άπληστων αλγορίθμων για χρωματισμό μονοπατιών σε κατευθυνόμενα δένδρα.

2 Ορισμός του Προβλήματος

Έστω $G = \langle V; E \rangle$ ένα γράφημα κατευθυνόμενο* ή μη κατευθυνόμενο. Ορίζουμε $\chi'(G)$ τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων που χρειάζονται για να χρωματίσουμε τις ακμές του G και $\chi'(e)$ είναι το χρώμα της ακμής $e \in E$. Έστω P είναι το σύνολο των μονοπατιών - αιτήσεων (κατευθυνόμενα ή μη κατευθυνόμενα) στο G. Έχουμε ήδη ορίσει το φορτίο ℓ_e μιας ακμής $e \in E$ ως το πλήθος των μονοπατιών που τη χρησιμοποιούν και ως φορτίο του συνόλου μονοπατιών L το μέγιστο φορτίο μεταξύ όλων των ακμών. Έστω $\Lambda(G, P)$ το πλήθος των χρωμάτων (μηκών κύματος) που χρησιμοποιούνται για το χρωματισμό του P και $\lambda(p)$ είναι το χρώμα (μήκος κύματος) του μονοπατιού p. Ως ελάχιστο πλήθος χρωμάτων (μηκών κύματος) για το χρωματισμό του P ορίζουμε το $\Lambda^*(G, P)$. Τέλος συμβολίζουμε $u \sim v$ ένα μη κατευθυνόμενο μονοπάτι ανάμεσα σε δύο κορυφές $u, v \in V$ και $u \rightsquigarrow v$ το αντίστοιχο κατευθυνόμενο.

Το *πρόβλημα του χρωματισμού μονοπατιών* ορίζεται ως εξής:

> Δεδομένου γράφου G και συνόλου μονοπατιών P να δοθεί χρωματισμός των μονοπατιών με τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων τέτοιος ώστε δύο οποιαδήποτε μονοπάτια με μια κοινή ακμή να έχουν διαφορετικό χρώμα.

*Για κατευθυνόμενα γραφήματα κάθε δύο κορυφές ενώνονται με δύο κατευθυνόμενες ακμές αντίθετης κατεύθυνσης και τα μονοπάτια είναι κατευθυνόμενα.

Λέμε ότι ένας χρωματισμός είναι σωστός αν οποιαδήποτε δύο μονοπάτια με μια κοινή ακμή έχουν διαφορετικό χρώμα. Αξίζει να σημειωθεί ότι το φορτίο ενός συνόλου μονοπατιών L αποτελεί ένα κάτω φράγμα για τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων που χρειάζονται για ένα σωστό χρωματισμό.

3 Πολυπλοκότητα Προβλήματος

Στο [4] αποδεικνύονται μια σειρά από αποτελέσματα που αφορούν την πολυπλοκότητα του προβλήματος χρωματισμού μονοπατιών κυριώς σε δένδρα. Στην συνέχεια παρουσιάσουμε αυτά τα αποτελέσματα. Όταν ο βαθμός του δένδρου είναι σταθερός τότε το πρόβλημα του χρωματισμού μονοπατιών ανήκει στο P αλλά στη γενική περίπτωση είναι NP-complete.

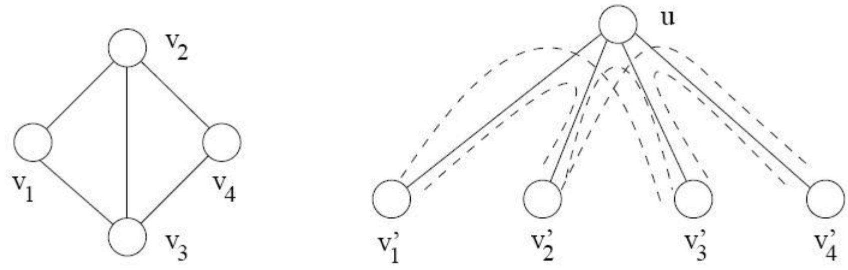
Θεώρημα 3.1 ([4]) *Το πρόβλημα του χρωματισμού μονοπατιών σε μη κατευθυνόμενα σταθερού βαθμού δένδρα ανήκει στο P.*

Θεώρημα 3.2 ([4]) *Το πρόβλημα απόφασης του χρωματισμού μονοπατιών με k χρώματα σε μη κατευθυνόμενα δένδρα βάθους 2 είναι NP-complete.*

Απόδειξη: Ανάγουμε το πρόβλημα απόφασης του χρωματισμού ακμών με k χρώματα σε γράφημα που είναι γνωστό ότι είναι NP-complete, στο πρόβλημα απόφασης του χρωματισμού μονοπατιών με k χρώματα σε μη κατευθυνόμενα δένδρα. Θα δείξουμε ότι για οποιοδήποτε στιγμιότυπο του προβλήματος χρωματισμού ακμών σε γράφημα υπάρχει ισοδύναμο στιγμιότυπο του προβλήματος χρωματισμού μονοπατιών σε μη κατευθυνόμενο δένδρο.

Έστω ένα στιγμιότυπο του προβλήματος χρωματισμού ακμών σε γράφημα $G = \langle V; E\rangle$. Κατασκευάζουμε ένα στιγμιότυπο του προβλήματος χρωματισμού μονοπατιών σε ένα γράφημα αστέρα T και ένα σύνολο μονοπατιών P ως εξής: Στο γράφημα T κατασκευάζουμε έναν κόμβο v' για κάθε κόμβο $v \in V$ και έναν κόμβο u ο οποίος συνδέεται με ακμές με όλους τους κόμβους v'. Το σύνολο μονοπατιών P περιέχει ένα μονοπάτι $v'_i \sim v'_j$ για κάθε αντίστοιχη ακμή $(v_i, v_j) \in E$. Στο σχήμα 1 φαίνεται ένα παράδειγμα κατασκευής της αναγωγής.

Αν έχουμε ένα χρωματισμό χ'' στο γράφο με k χρώματα τότε απλά χρωματίζουμε ως εξής $\lambda(v'_i \sim v'_j) = \chi''(v_i, v_j)$. Αφού το χ'' είναι ένας σωστός χρωματισμός τότε λόγω κατασκευής και ο λ θα είναι ένας σωστός χρωματισμός. Αντίστροφα, αν τα μονοπάτια του P στο T χρωματίζονται χρησιμοποιώντας k χρώματα τότε χρωματίζουμε ως εξής $\chi''(v_i, v_j) = \lambda(v'_i \sim v'_j)$ και ο χρωματισμός χ'' είναι σωστός αφού και ο λ είναι σωστός. Γενικά λόγω της κατασκευής ισχύει ότι για όποια μονοπάτια χρησιμοποιούν μια κοινή ακμή στο T οι αντίστοιχες ακμές στο G είναι γειτονικές και αντίστροφα. $\square$



Σχήμα 1: Παράδειγμα κατασκευής για την αναγωγή του θεωρήματος 3.2.

Στα κατευθυνόμενα δένδρα το πρόβλημα απόφασης του χρωματισμού μονοπατιών είναι NP-complete ακόμα και για σταθερού βαθμού δένδρα.

Θεώρημα 3.3 ([4]) *Το πρόβλημα απόφασης του χρωματισμού μονοπατιών με k χρώματα σε κατευθυνόμενα δένδρα βάθους 3 είναι NP-complete.*

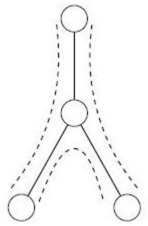
Απόδειξη: Ανάγουμε το πρόβλημα του χρωματισμού ακμών σε k-κανονικό γράφημα στο πρόβλημα μας. Κατασκευάζουμε τα T και P όμοια με την απόδειξη του θεωρήματος 3.2 με τη διαφορά ότι για κάθε ακμή κατασκευάζουμε δύο κατευθυνόμενα μονοπάτια, δηλαδή $P = \{v_i \rightsquigarrow v_j, v_j \rightsquigarrow v_i | (v_i, v_j) \in E\}$.

Αν $\chi''(G) = k$ τότε απλά χρωματίζουμε ως εξής $\lambda(v'_i \rightsquigarrow v'_j) = \lambda(v'_j \rightsquigarrow v'_i) = \chi''(v_i, v_j)$. Αντίστροφα αν τα μονοπάτια του P στο T χρωματίζονται χρησιμοποιώντας k χρώματα τότε κατασκευάζουμε νέα T' και P'.

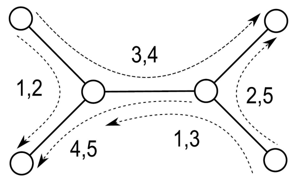
Αρχικά ορίζουμε ως $T_{r,x,y}$ το κατευθυνόμενο δένδρο βάθους 2 με ρίζα το r και παιδιά τα x, y και σύνολο κορυφών $\{r \rightsquigarrow x, x \rightsquigarrow r, r \rightsquigarrow y, y \rightsquigarrow r\}$. Ορίζουμε επίσης $P_{r,x,y,k}$ το σύνολο $\{x \rightsquigarrow y\}$ πληθαρίθμου k. Κατασκευάζουμε το T' βάθους 3, προσθέτοντας τα $T_{v_i,v_{ij1},v_{ij2}}$ και $T_{v_i,v_{ji1},v_{ji2}}$ για κάθε ζεύγος ζευγαριών $v_i \rightsquigarrow v_j$, $v_j \rightsquigarrow v_i$ του P. Κατασκευάζουμε το P' αντικαθιστώντας το $v_i \rightsquigarrow v_j$ και $v_j \rightsquigarrow v_i$ με $v_{ij1} \rightsquigarrow v_{ji2}$ και $v_{ji1} \rightsquigarrow v_{ij2}$ και προσθέτοντας τα σύνολα $P_{v_i,v_{ij1},vij2,k-1}$ και $P_{v_i,v_{ji1},vji2,k-1}$. Η όλη κατασκευή εγγυάται ότι σε ένα k χρωματισμό του P', $\lambda(v_{ij1} \rightsquigarrow v_{ji2}) = \lambda(v_{ji1} \rightsquigarrow v_{ij2})$ αφού $\Lambda^*(P_{v_i,v_{ij1},vij2,k-1}) = k-1$. Άρα αν τα μονοπάτια του P στο T χρωματίζονται χρησιμοποιώντας k χρώματα τότε μπορούμε να χρωματίσουμε ως εξής $\chi''(v_i, v_j) = \lambda(v_{ij1} \rightsquigarrow v_{ji2})$ □

Σημειώνουμε επίσης ότι ο χρωματισμός μονοπατιών σε κατευθυνόμενα δένδρα βάθους 2 ανήκει στο P [6].

Θεώρημα 3.4 ([4]) *Το πρόβλημα απόφασης του χρωματισμού μονοπατιών με k χρώματα σε κατευθυνόμενα δυαδικά δένδρα είναι NP-complete.*



Σχήμα 2: Μη κατευθυνόμενο δένδρο όπου κάθε διακεκομένη γραμμή αναπαριστά $L/2$ μονοπάτια



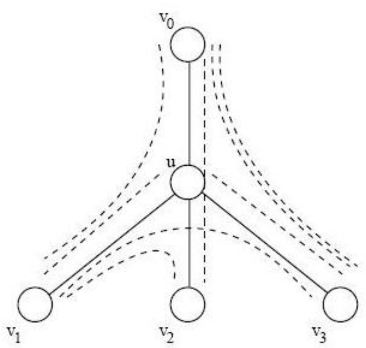
Σχήμα 3: Μη κατευθυνόμενο δένδρο όπου κάθε διακεκομένο βέλος αναπαριστά $L/2$ κατευθυνόμενα μονοπάτια

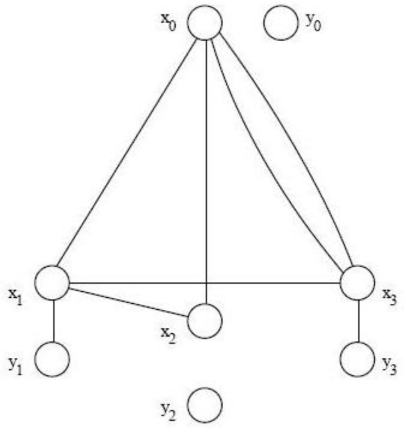
Κάτω Φράγματα. Για μη κατευθυνόμενα δένδρα το σχήμα 2 δίνει ένα δίκτυο που χρειάζεται τουλάχιστον $3L/2$ για να χρωματιστεί σωστά. Για μη κατευθυνόμενα δένδρα το σχήμα 4 δίνει ένα δίκτυο που χρειάζεται τουλάχιστον $5L/4$ για να χρωματιστεί σωστά [5]. Κάθε διακεκομένο βέλος αναπαριστά 2ℓ μονοπάτια οπότε 10ℓ συνολικά. Όμως κανένα χρώμα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περισσότερα από 2 μονοπάτια άρα χρειαζόμαστε τουλάχιστον $10\ell/2 = 5L/4$ χρώματα. Επίσης αν κάθε σύνολο ℓ χρωμάτων είναι ένας αριθμός $1, \ldots, 5$ και αναθέτουμε σε κάθε σύνολο 2ℓ παράλληλων μονοπατιών 2 αριθμούς ώστε να δημιουργούμε ένα σωστό χρωματισμό όπως στο σχήμα 4 τότε τα $5L/4$ χρώματα επαρκούν για το χρωματισμό. (Περισσότερες λεπτομέρεις στην παρουσίαση)

4 Αλγόριθμοι για μη κατευθυνόμενα Δενδρικά Γραφήματα

Οι αλγόριθμοι για το χρωματισμό των μη κατευθυνόμενων δένδρων χωρίζουν το πρόβλημα σε φάσεις και ανάγουν το πρόβλημα του χρωματισμού μονοπατιών σε κάθε φάση σε ένα πρόβλημα χρωματισμού ακμών σε ένα γράφημα. Οι αλγόριθμοι που θα ασχοληθούμε είναι άπληστοι (greedy) [7, 2] και σε κάθε φάση επιλέγουν έναν κόμβο u με βάση την πρώτα κατά πλάτος διάτρεξη του δένδρου T (Breadth-First Search). Θα περιγράψουμε εδώ την κεντρική ιδέα αυτών των αλγορίθμων όπως παρουσιάζεται στο [1].

Γενικά μια φάση i του αλγόριθμου θα έχει επιλέξει έναν κόμβο u του δένδρου, θα δέχεται ως είσοδο το χρωματισμό των μονοπατιών του P από τις προηγούμενες φάσεις και θα επεκτείνει αυτό το χρωματισμό χρωματίζοντας τα μονοπάτια που περνάνε από τον κόμβο u και δεν είχαν χρωματιστεί σε κάποια από τις προηγούμενες φάσεις. Για το χρωματισμό αυτό ανάγουμε το στιγμιό-





Σχήμα 4: Παράδειγμα κατασκευής G_u γραφήματος για μη κατευθυνόμενα Δενδρικά Γραφήματα.

τυπο σε ένα στιγμιότυπο χρωματισμού ακμών. Παρακάτω περιγράφουμε την κατασκευή αυτή.

Έστω v_0 ο πατέρας του u και $v_1, v_2, \ldots, v_k$ τα k παιδιά του u. Κατασκευάζουμε ένα γράφημα G_u που σχετίζεται με τον κόμβο u ως εξής: για κάθε κόμβο v_i με $0 \leq i \leq k$ δημιουργούμε δύο κόμβους x_i και y_i στο G_u. Για κάθε $u \sim v_i$ στο T δημιουργούμε μια ακμή (x_i, y_i) στο G_u. Για κάθε $v_i \sim v_j$ στο T δημιουργούμε μια ακμή (x_i, x_j) στο G_u. Το G_u με βάση την παραπάνω κατασκευή έχει μέγιστο βαθμό κορυφών L. Στο σχήμα 4 φαίνεται ένα παράδειγμα της κατασκευής που περιγράψαμε. Οι ακμές που είναι γειτονικές στον x_i στο G_u αντιπροσωπεύουν μονοπάτια που χρησιμοποιούν την ακμή (u, v_i) στο T. Επίσης οι ακμές που είναι γειτονικές στον x_0 αντιστοιχούν σε μονοπάτια του G_u που χρησιμοποιούν την ακμή (u, v_0) στο T οπότε έχουν χρωματιστεί σε μια προηγούμενη φάση του αλγορίθμου. Τα χρώματα των ακμών που είναι γειτονικές στην x_0 μπορούν να επαναχρησιμοποιηθούν για το χρωματισμό των υπολοίπων ακμών και αν δεν επαρκούν να χρησιμοποιηθούν νέα. Το πρόβλημα που προκύπτει είναι ίδιας δυσκολίας με το να έπρεπε να χρωματίσουμε το γράφημα χωρίς περιορισμούς στα χρώματα αφού τα χρώματα που θα χρησιμοποιούσαμε για τις γειτονικές ακμές του x_0 θα έπρεπε ούτως ή άλλως να είναι διαφορετικά. Στο [7] χρησιμοποιείται ένας αλγόριθμος του Shannon για χρωματισμό ακμών σε γράφημα με μέγιστο βαθμό L χρησιμοποιώντας το πολύ $3L/2$ χρώματα, οπότε αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.1 ([7]) *Υπάρχει άπληστος πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος που χρωματίζει οποιοδήποτε σύνολο μονοπατιών με φορτίο L σε μη κατευθυνόμενο* *δενδρικό γράφημα χρησιμοποιώντας το πολύ $3L/2$ χρώματα.*

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ακριβές με βάση το κάτω φράγμα που παρουσιάστηκε στο το σχήμα 2. Στο [2] παρουσιάζεται ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος χρησιμοποιώντας πάλι το χρωματισμό ακμών σε γραφήματα.

Θεώρημα 4.2 (**[2]**) *Υπάρχει άπληστος πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος που χρωματίζει οποιοδήποτε σύνολο μονοπατιών P σε μη κατευθυνόμενο δενδρικό γράφημα χρησιμοποιώντας το πολύ $\lfloor 1.1\chi(P)+0.8 \rfloor$ χρώματα, όπου $\chi(P)$ είναι ο βέλτιστος αριθμός χρωμάτων που μπορεί να χρωματιστεί το P.*

5 Αλγόριθμοι για κατευθυνόμενα Δενδρικά Γραφήματα

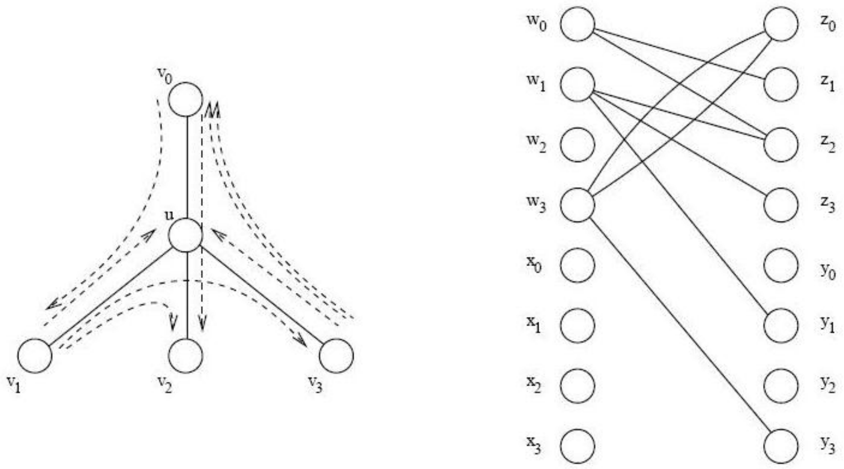
Ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο είναι αυτό των κατευθυνόμενων ακμών, όπου κάθε ακμή στο γράφημα αποτελείται από δύο αντίθετα κατευθυνόμενες συνδέσεις και οι αιτήσεις είναι διατεταγμένα ζεύγη αποστολέα - παραλήπτη, δηλαδή στην περίπτωση των δένδρων είναι κατευθυνόμενα μονοπάτια. Ένα κάτω φράγμα στο χρωματισμό στο πρόβλημα για το μοντέλο αυτό φαίνεται στο σχήμα 4.

Οι καλύτεροι γνωστοί αλγόριθμοι για το πρόβλημα αυτό ανάγουν το χρωματισμό των μονοπατιών σε ένα πρόβλημα χρωματισμού ακμών σε ένα διμερές γράφημα. Θα παρουσιάσουμε εδώ την κεντρική ιδέα των αλγορίθμων που παρουσιάζονται στα [5, 3] καθώς και την απόδοση τους.

Οι αλγόριθμοι ακολουθούν την ίδια φιλοσοφία με τους αλγόριθμους για μη κατευθυνόμενα δένδρα (βλ.ενότητα 4) με τη διαφορά ότι πραγματοποιούν μια διαφορετική κατασκευή σε κάθε φάση τους στον κόμβο u δημιουργώντας ένα διμερές γράφημα H_u.

Έστω δένδρο T σύνολο μονοπατιών P και κόμβος u για τη φάση i, το γράφημα H_u κατασκευάζεται ως εξής: συμβολίζουμε v_0 τον πατέρα του u και $v_1, v_2, \ldots, v_k$ τα k παιδιά του u. Για κάθε κόμβο v_i με $0 \leq i \leq k$ δημιουργούμε 4 κόμβους x_i, y_i, w_i, z_i στο H_u με τους κόμβους w_i, x_i να ανήκουν στη δεξιά διαμέριση και τους κόμβους y_i, z_i στην αριστερή. Για κάθε μονοπάτι που κατευθύνεται από τον κόμβο u_i στον u_j δημιουργούμε μια ακμή που ενώνει τους κόμβους w_i, z_j στο H_u. Ομοίως για κάθε $u_i \rightsquigarrow u$ δημιουργούμε μια ακμή (w_i, y_i) στο H_u και για κάθε $u \rightsquigarrow u_i$ δημιουργούμε μια ακμή (z_i, x_i) στο H_u. Το H_u με βάση την παραπάνω κατασκευή έχει μέγιστο βαθμό κορυφών L και υποθέτουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι είναι L-κανονικό. Στο σχήμα 5 φαίνεται ένα παράδειγμα της κατασκευής που περιγράψαμε.

Οι ακμές που είναι γειτονικές στις κορυφές w_0, z_0 ονομάζονται *δεσμευμένες* και αντιστοιχούν σε μονοπάτια που είναι ήδη χρωματισμένα από κάποια



Σχήμα 5: Παράδειγμα κατασκευής H_u διμερούς γραφήματος για κατευθυνόμενα Δενδρικά Γραφήματα.

προηγούμενη φάση. Το πρόβλημα χρωματισμού που προκύπτει ονομάζεται α-περιορισμένος χρωματισμός ακμών διμερούς γραφήματος και δηλώνει ότι οι δεσμευμένες ακμές έχουν χρωματιστεί με το πολύ αL χρώματα. Το πρόβλημα αυτό είναι πιο δύσκολο από το χρωματισμό ακμών διμερούς γραφήματος χωρίς περιορισμούς που χρειάζεται L χρώματα.

Ορισμοί. Για $i = 0, \dots, k$ ονομάζουμε *γραμμή* το ζεύγος w_i, z_i του H_u. Λέμε ότι μια γραμμή χρησιμοποιεί το χρώμα c αν το c χρησιμοποιείται σε μια ακμή που είναι γειτονική είτε στην w_i είτε στην z_i. Ονομάζουμε *μονά* S τα χρώματα που χρησιμοποιούνται μόνο σε μια δεσμευμένη ακμή και *διπλά* D όσα χρησιμοποιούνται σε δύο. Ο αλγόριθμος υποθέτει ότι

$$S + D = 4L/3 \tag{1}$$

και σε περίπτωσεις που αυτό δεν ισχύει το κατασκευάζει με διορθωτικά βήματα.

Ο αλγόριθμος αποσυνδέει το γράφημα σε L ταιριάσματα (matchings) κάτι το οποίο γίνεται αφού το γράφημα είναι L-κανονικό. Ο χρωματισμός των ταιριασμάτων γίνεται με τρόπο ώστε να ισχύουν οι δύο παρακάτω συνθήκες:

1. Ο αριθμός των νέων χρωμάτων που χρησιμοποιούνται να είναι το πολύ $D/2$.

2. Κάθε γραμμή χρησιμοποιεί το πολύ $4L/3$ χρώματα.

Ισχύει ότι $2D+S \leq 2L$ αφού το πλήθος των γειτονικών ακμών στις w_0, z_0 είναι $2L$ και από τη σχέση 1 έχουμε $D \leq 2L/3$. Άρα ο συνολικός αριθμός των χρωμάτων, από την ορθότητα της συνθήκης 1, είναι $D+S+D/2 = 5L/3$. Το αποτέλεσμα αυτό οδηγεί στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.1 ([3]) *Υπάρχει άπληστος πολυωνυμικού χρόνου αλγόριθμος που χρωματίζει οποιοδήποτε σύνολο κατευθυνόμενων μονοπατιών P σε κατευθυνόμενο δενδρικό γράφημα χρησιμοποιώντας το πολύ $5L/3$ χρώματα.*

Στο [5] παρόμοιες τεχνικές οδηγούν σε ένα αλγόριθμο που χρησιμοποιεί το πολύ $7L/4$ χρώματα. Το αποτέλεσμα του θεωρήματος 5.1 είναι το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα για ντετερμινιστικούς άπληστους αλγόριθμους σε κατευθυνόμενα δενδρικά γράφηματα. Επιπλέον το παρακάτω θεώρημα δείχνει ότι δεν υπάρχει καλύτερος ντετερμινιστικός άπληστος αλγόριθμος που να λύνει το πρόβλημα του χρωματισμού μονοπατιών σε κατευθυνόμενα δενδρικά γράφηματα.

Θεώρημα 5.2 ([3]) *Για κάθε $L > 1$ και κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε άπληστο αλγόριθμο G υπάρχει ένα δένδρο και ένα σύνολο μονοπατιών μέγιστου φορτίου L για το οποίο ο G χρησιμοποιεί τουλάχιστον $(\frac{5}{3} - \varepsilon)L$ χρώματα.*

Αναφορές

[1] I. Caragiannis, C. Kaklamanis, and P. Persiano. Approximation algorithms for path coloring in trees.

[2] T. Erlebach and K. Jansen. The complexity of path coloring and call scheduling. *Theoretical Computer Science*, 255(1–2):33–50, 2001.

[3] T. Erlebach, K. Jansen, C. Kaklamanis, M. Mihail, and P. Persiano. Optimal wavelength routing on directed fiber trees. *Theoretical Computer Science*, 221:119–137, 1999.

[4] S. R. Kumar, R. Panigrahy, A. Russel, and R. Sundaram. A note on optical routing on trees. *Information Processing Letters*, 62(6):295–300, 1997.

[5] V. Kumar and E. J. Schwabe. Improved access to optical bandwidth in trees. In *SODA: ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (A Conference on Theoretical and Experimental Analysis of Discrete Algorithms)*, 1997.

[6] M. Mihail, C. Kaklamanis, and S. Rao. Efficient access to optical bandwidth. In *FOCS '95: Proceedings of the 36th Annual Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'95)*, page 548, Washington, DC, USA, 1995. IEEE Computer Society.

[7] P. Raghavan and E. Upfal. Efficient routing in all-optical networks. pages 134–143, 1994.