# Energy, Congestion and Dilation in Radio Networks

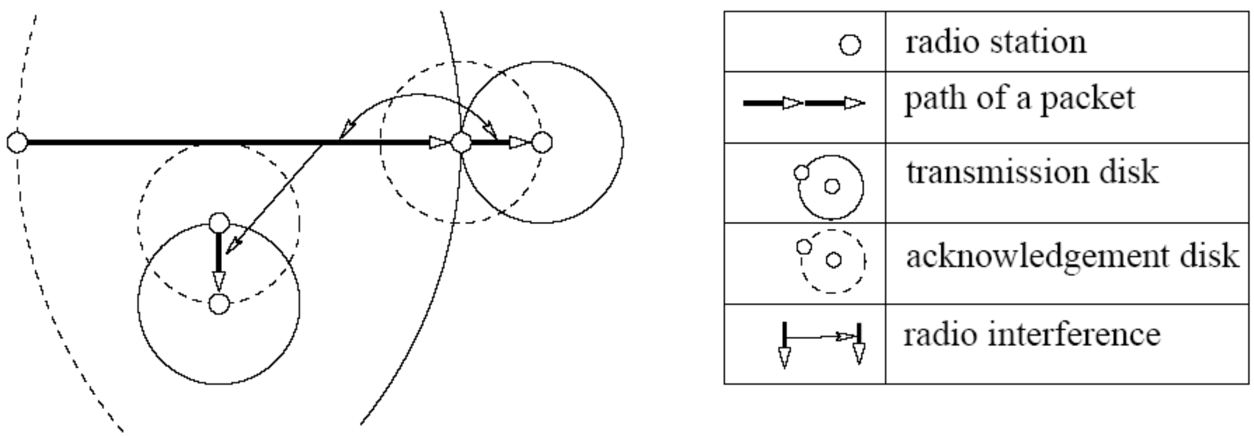
Λαυτσίδης Ηλίας: 2660
Τσαντήλας Κωστής: 2738
Φυσικόπουλος Βησσαρίων: 2745

# Μοντελοποίηση των radio networks

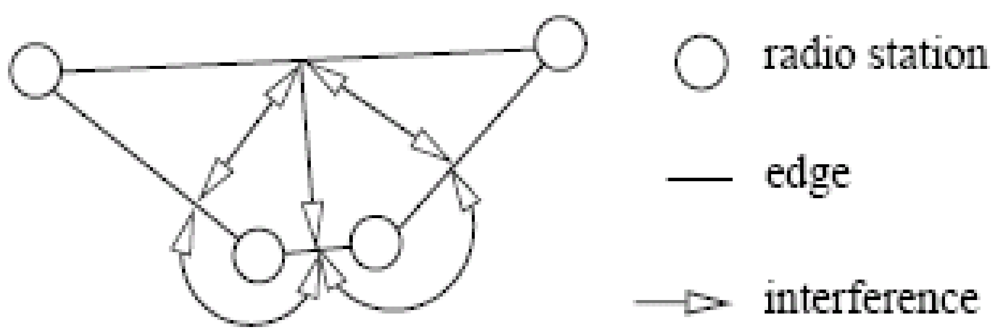
- Συνολο V$\subseteq R^2$ n ραδιοσταθμών.
- Γεωμετρική διάμετρος d.
- Ακτίνα μετάδοσης r και ακμές.
- Περιοχή κάλυψης μετάδοσης D(e)= Dr(u)$\cup$ Dr(v).

# Παρεμβαλλόμενες ακμές

- Η ακμή e’ παρεμβαίνει στην (u, v) εάν η D(e’) περιέχει την u ή v.
- Σύνολο παρεμβαλλόμενων ακμών : Int(e):={e’∈E(N) | e’




- Γράφος παρεμβολής GInt(N).

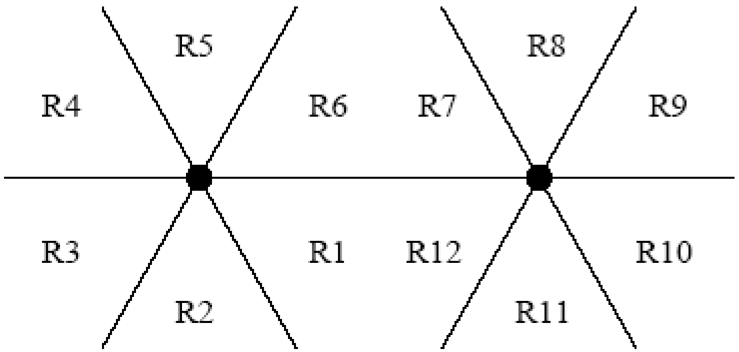


# Congestion and Dilation

- Φορτίο l(e ): αριθμός πακέτων που περνούν από την e.
- $\sum_{e' \in \mathrm{Int}(e)} l(e')$ : φορτίο παρεμβαλλόμενων ακμών στο e.
- Συμφόρηση ακμής: $C_P(e)$ =l(e) + $\sum_{e' \in \mathrm{Int}(e)} l(e')$ .
- Συμφόρηση συστήματος μονοπατιού P: $C_{\mathcal{P}}(V) := \max_{e \in E_{\mathcal{P}}} \{C_{\mathcal{P}}(e)\}$
- dilation $D_P(V)$ :μήκος μεγαλύτερου μονοπατιού στο P.
  - T≥ $D_P(V)$

# Θεώρημα 1(Κάτω όριο για Τ)

$$T \geq \max\left\{ C/12, D \right\} = \Omega(C + D)$$




- $e = (u, v)$ με max C
- $E_i := \{\{p, q\} \mid (p \in R_i \vee q \in R_i) \wedge \{p, q\} \in Int(e)\}$
- $\forall e', e'' \in E_i \Rightarrow e' \in Int(e'') \vee e'' \in Int(e')$
- Έστω $l_i := l(e) + \sum_{e' \in E_i} l(e')$ οπότε $\sum_{i=1}^{12} l_i \geq C$
- Άρα $T \geq \max_{i \in [12]}\{l_i\} \geq \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} l_i \geq \frac{C}{12}$

# Ενεργειακά Μοντέλα

- Απαιτούμενη θεωρητική ενέργεια για μετάδοση σε απόσταση r, $O(r^2)$.

- Unit Energy Model: $\text{U-Energy}_{\mathcal{P}}(V) := \sum_{e \in E_{\mathcal{P}}(N)} |e|^2$ .

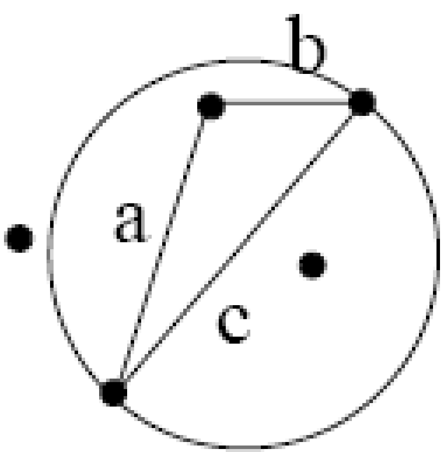
- Flow Energy Model: $\text{F-Energy}_{\mathcal{P}}(V) := \sum_{e \in E_{\mathcal{P}}(N)} \ell(e)|e|^2$ .

# Ελαχιστοποίηση Ενέργειας

- Θεώρημα 2: Το ελάχιστο γεννητικό δέντρο είναι ένα βέλτιστο σύστημα μονοπατιού με βάση το Unit Energy Model.

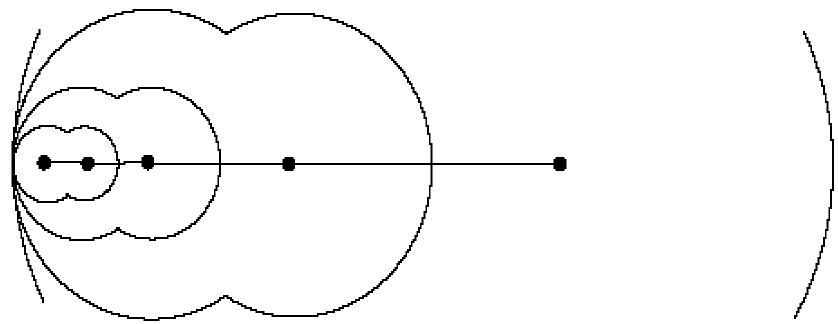
Στο flow energy μοντέλο το ελάχιστο δίκτυο δεν είναι απαραίτητα δέντρο.

- Θεώρημα 3: Ένας υπογράφος του Gabriel γράφου είναι ένα βέλτιστο σύστημα μονοπατιού με βάση το Flow Energy Model.
  - Όχι πάντα optimal. Δεν λαμβάνεται υπόψιν το l(e).



# Diversity

- $V = \{u_1, \ldots, u_n\}, |u_i, u_{i+1}| = 2^i$



- Αριθμός παρεμβολής n-2
- Diversity: $g(V) := |\{m \mid \exists u, v \in V \ : \ \lfloor \log |u, v| \rfloor = m\}|$
  - O(n),Ω(logn)
  - $g(V) \leq 1 + \log \frac{\max_{u,v \in V} ||u, v||_2}{\min_{u,v \in V \wedge u \neq v} ||u, v||_2}$ (Λήμμα 1)
  - # παρεμβολής στην γραμμή O(g(V))

# Προσέγγιση Συμφόρησης

Ιεραρχικού επιπέδου γράφος HLG(ορισμός – χαρακτηριστικά)

- $w$ επίπεδα $L_0, L_1, \ldots L_n, O\left(g\left(V\right)\right)$
- $V = V\left(L_0\right) \supseteq V\left(L_1\right) \supseteq \ldots \supseteq V\left(L_n\right) = \left\{u_0\right\}$
- $\forall u, v \in V\left(L_i\right) : |u, v| \geq r_i$
- $\forall u \in V\left(L_i\right) \exists v \in V\left(L_{i+1}\right) : |u, v| \leq r_{i+1}$
- $a \geq \beta > 1, r_0 < \min_{u,v \in V} |u, v|, r_i := \beta^i r_0$
- $E\left(L_i\right) := \left\{\left(u, v\right) \mid u, v \in V\left(L_i\right) \wedge |u, v| \leq a r_i\right\}$

# Προσέγγιση Συμφόρησης ΙΙ

- $\text{C spanner}: \forall u, v \in V, \exists p: u \rightarrow v \text{ με } |p| \leq c|u,v|$

- $\text{weak}: \forall u, v \in V, \exists p: u \rightarrow v \;\; εμπεριέχεται σε κύκλο με$
  $\mathrm{r} = \mathrm{c}|\mathrm{u},\mathrm{v}|, \text{κέντρο } u$

Θεώρημα 4 *[9]*

- $εάν\ a > 2\frac{\beta}{\beta-1} \text{ ο } HLG\ είναι\ c-spanner\ με\ c = \max\left\{\beta\frac{\alpha(\beta-1)+2\beta}{\alpha(\beta-1)-2\beta}, \frac{\alpha}{\beta}\right\}$

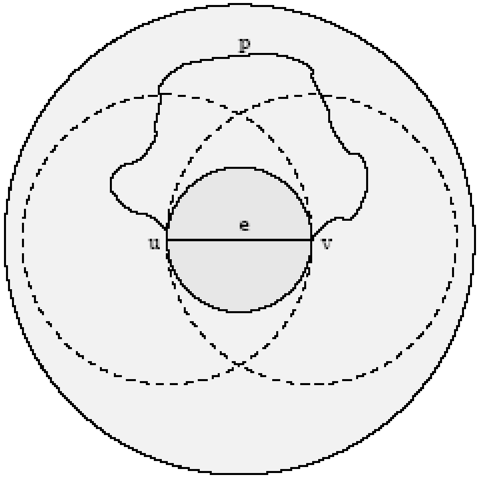
- $\#\ παρεμβολής\ HLG: O(g(V))\ (Λήμμα 2)$

- $Χωρητικότητα\ \kappa(R): \quad \kappa(R_i) := \sum_{e\in E} l(e)A(R_i), \quad \kappa(R) := \sum_{i=1}^{m}\kappa(R_i)$
  - $\kappa(R) \leq A(R)C\ (Λήμμα 3)$
  - $Χωρητικότητα\ κμής: cl(e)|e|^2, c > 0\ (Λήμμα 4)$

# Προσέγγιση Συμφόρησης III

Λημμα 5

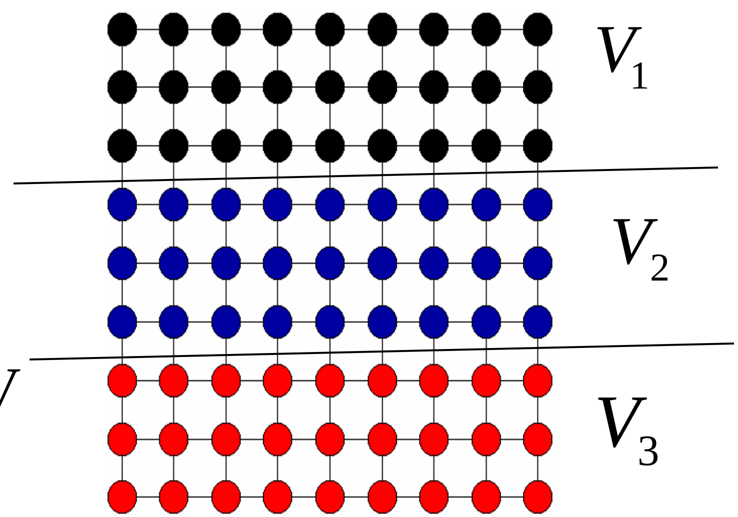
- $\forall e=(u,v)\in P^{*} \wedge \notin \textit{weak}-c-\textit{spanner } N \rightarrow \left(u \xrightarrow{\textit{path } p} v\right)\in N$
- $D_c(e)\ \mu\varepsilon\ \alpha\kappa\tau\acute{\iota}\nu\alpha: \left(c-\frac{1}{2}\right)|u,v|, \kappa\acute{\varepsilon}\nu\tau\rho o: \frac{1}{2}\left(u+v\right)$




- $\mathrm{e}_0=\left(u_0,v_0\right)\in E\left(N\right), \det our\ e \xrightarrow[z_0=\frac{1}{2}(u_0+v_0)]{z=\frac{1}{2}(u+v)} |z,z_0|\le\left(c-\frac{1}{2}\right)|e|$
- $E_{i,e_0}\subseteq E\left(N^{*}\right), |e|\in\left[2^{i},2^{i+1}\right] \textit{reroute } e_0, z\in \textit{disk}: \left(c-\frac{1}{2}\right)2^{i+1}, z_0$
- $D_c\left(e\right)\ge\pi 2^{2\iota}, D_c\left(e\right)\in D: 2^{i+1}\left(c+1\right), z_0$
- $\Lambda 3, \Lambda 4, \tau o\ \pi o\lambda\acute{\upsilon}\ g(V) \textit{non}-\textit{empty} E_{i,e_0} \Rightarrow \sum_{e\in E_{e_0}} l_e \le c' C^{*} g(V)$
- $HPG\ \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\acute{\varepsilon}\chi\varepsilon\iota\ P\ \mu\varepsilon\ C=O(g(V)^{2} C_{P^{*}}(V))$[Θεώρημα 5]

# Trade-offs 00 Congestion Vs Dilation

- $\sqrt{n}\times\sqrt{n}\ \pi\lambda\acute{\varepsilon}\gamma\mu\alpha,\ \mathrm{w(u,v)}=\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{n}^2},\ C=O\left(\frac{W}{\sqrt{n}}\right), \mathrm{D}=\mathrm{O}\left(\sqrt{\mathrm{n}}\right)$
- $n=9p^2, V_1, V_2,\ V_3, V_1 \xrightarrow{W/9} V_3$
- $D\leq 3p, u_i\in V_1 \xrightarrow{p_{i,j}} u_j\in V_2$
- $\kappa(p_{i,j})\geq c_1 l(p_{i,j})\sum_{e\in p_{i,j}}|e|^2, \xrightarrow{\min\ \forall e,|e|=\frac{d}{3D_p(G_n)}} \kappa(p_{i,j})\geq\frac{c_1 d^2 W}{9n^2 D_p(G_n)}$
- $\sum_{u_1\in V_1}\sum_{u_2\in V_3}\kappa(p_{i,j})\leq 9d^2$

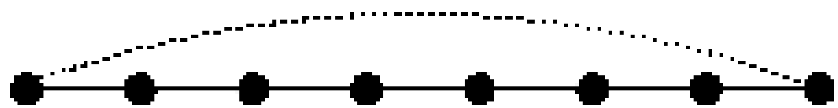



$\Theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha\, 6$

- $C_p(G_n)D_p(G_n)\geq\frac{c_1}{81}W$

# Trade-offs 0I Dilation Vs Energy

- $L_n = \{u_1, u_2, ..., u_n\}, |u_i, u_{i+1}| = \frac{d}{n}$
- $w(u_1, u_n) = W$
- $UE = \frac{d^2}{n}, FE = \frac{d^2 W}{n}, dilation = n$
- $\Theta\varepsilon\acute{\omega}\rho\eta\mu\alpha 7$



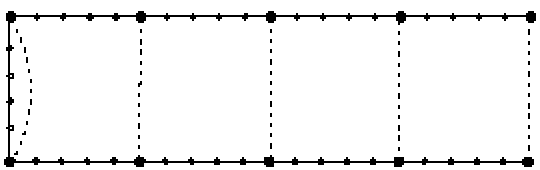
$$D_p\left(L_n\right) UE \geq \Omega(d^2)$$

$$D_p\left(L_n\right) FE \geq \Omega(d^2 W)$$

# Trade-offs I0 Ασυμβατότητα συμφόρησης-ενέργειας

$$\bullet U_{a,n}, a \in \left[0, \frac{1}{2}\right], L_{n^a}, απόσταση \frac{d}{n^a}, \frac{W}{n^a} σε\ απέναντι\ πλευρές$$

- Δεν βελτιστοποιείται αν εννώσουμε τις απέναντι κορυφές
- Μπορούμε να εννώσουμε x απέναντι κορυφές απόστασης στους οριζόντιους γράφους σβήνοντας ενα ενδιάμεσο μονοπάτι



Θεώρημα 8

$$\begin{aligned}
C_{\mathcal{P}}(V) &\geq \Omega(n^{1/3} C^*) \quad or \\
U\text{-}Energy_{\mathcal{P}}(V) &\geq \Omega(n^{1/3}\, U\text{-}Energy^*)\ , \\
C_{\mathcal{P}}(V) &\geq \Omega(n^{1/3} C^*) \quad or \\
F\text{-}Energy_{\mathcal{P}}(V) &\geq \Omega(n^{1/3}\, F\text{-}Energy^*)\ .
\end{aligned}$$

# Συμπεράσματα - Σύνοψη

| | Congestion | Dilation | Unit Energy | Flow Energy |
|---|---|---|---|---|
| Structure | HL Graph | Complete Network | MST | Gabriel Sub-Graph |
| Approx.-factor | $O(\log^2 n)$ | optimal | optimal | optimal |

| | Dilation | Congestion |
|---|---|---|
| Congestion | $C_{\mathcal{P}}(V) \cdot D_{\mathcal{P}}(V) \geq \Omega(W)$ | — |
| Unit Energy | $D_{\mathcal{P}}(V) \cdot \mathrm{UE}_{\mathcal{P}}(V) \geq \Omega(d^2)$ | $C_{\mathcal{P}}(V) \geq \Omega(n^{1/3} C^*_{\mathcal{P}}(V))$ or<br>$\mathrm{UE}_{\mathcal{P}}(V) \geq \Omega(n^{1/3} \mathrm{UE}^*_{\mathcal{P}}(V))$ |
| Flow Energy | $D_{\mathcal{P}}(V) \cdot \mathrm{FE}_{\mathcal{P}}(V) \geq \Omega(d^2 W)$ | $C_{\mathcal{P}}(V) \geq \Omega(n^{1/3} C^*_{\mathcal{P}}(V))$ or<br>$\mathrm{FE}_{\mathcal{P}}(V) \geq \Omega(n^{1/3} \mathrm{FE}^*_{\mathcal{P}}(V))$ |